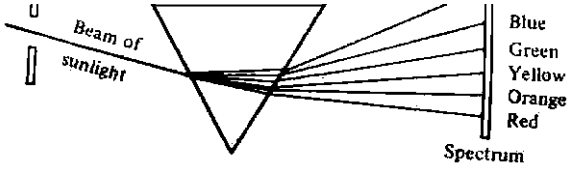
۲

مرور مباحثی از پردازش آنالوگ

وقتی سیگنال نور سفید به منشور تابانده شود، به مولفه های رنگی (قرمز- نارنجی- زرد- سبز- آبی- بنفش) تجزیه می گردد که به آن طیف نور سفید *spectrum* گفته می شود. محور این تجزیه اختلاف فرکانس نورهای مختلف است. به عبارت دیگر منشور سیگنال نور سفید را به مولفه های فرکانسی آن تجزیه و آن را به ترتیب فرکانسی مرتب می کند. اگر نورهای حاصل تجزیه، به منشوری بر عکس تابانده شوند با یکدیگر ترکیب شده و مجددا نور سفید حاصل می شود.



طیف سیگنال: مطابق آنچه برای نور گفته شد، طیف سیگنال نموداری (یا تابع ریاضی) است که مولفه های فرکانسی تجزیه شده سیگنال را نشان می دهد، این کار را اپراتور فوریه انجام می دهد.$X(f)=F_{ourier}[x(t)]$

پاسخ فرکانس: اگر سیگنال مورد نظر پاسخ ضربه $h(t)$ سیستمی باشد به طیف آن $H(f)$ پاسخ فرکانس می گویند.

تخمین طیف: سیگنالهای موجود در طبیعت که ممکن است دارای مولفه های فرکانسی مورد علاقه باشند عموما آلوده به نویز هستند. به استخراج مولفه های فرکانسی سیگنال مورد نظر از اختلاط نویزی تخمین طیف گفته می شود، که بیان کننده نگاه آماری به مسئله است.

۲-۱ طیف سیگنال

۲-۱-۱ سیگنال پریودیک: سری فوریه

سیگنال پریودیک را می توان طبق سری فوریه به مولفه های فرکانسی آن تجزیه کرد.

$$c(k)=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt, \quad \Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c(k)e^{jk\Omega_0 t}=c(0)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2|c(k)|\cos[k\Omega_0 t+\varphi(c(k)), \quad c(k)=|c(k)|e^{j\varphi(c(k))}$$

در این روابط T_0 پریود سیگنال پریودیک و Ω_0 فرکانس زاویه ای اصلی است.

- **شرط وجود:** اگر $x(t)$ انتگرال قدر مطلق محدود باشد

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|dt<\infty$$

و تعداد ماکزیمم مینیممها و ناپیوستگی ها در یک پریود محدود باشد، آنگاه

$$x(t)=\lim_{l\to\infty} x_l(t)=\lim_{l\to\infty}\sum_{k=-l}^{+l} c(k)e^{jk\Omega_0 t}$$

می گردد. اغلب سیگنالهای پریودیک این شرایط را ارضا می کند .اگر $x(t)$ مثلا در t_0 دارای ناپیوستگی باشد، آنگاه $x_l(t)$ به مقدار میانی ناپیوستگی میل می کند.

- **سیگنال توان**: شرط ضعیف تر برای وجود سری فوریه این است که سیگنال، سیگنال توان باشد.

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\,dt<\infty$$

در این صورت میل کردن $x_l(t)$ به $x(t)$ تضمینی نیست ولی تفاوت توان دو سیگنال صفر است.

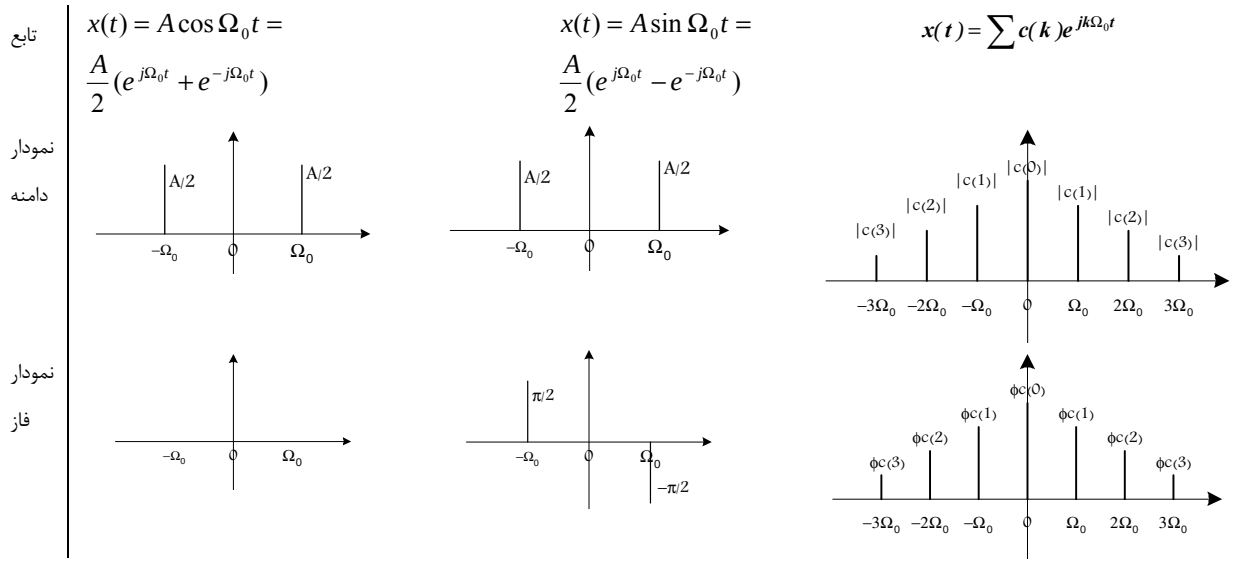
$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{T_0}\lim_{l\to\infty}\int_{T_0}|x_l(t)|^2\,dt$$

به این نوع همگرائی، همگرائی متوسط مربعات می گویند.

- اگر سیگنال انتگرال قدر مطلق محدود باشد، سیگنال توانی نیز می باشد ولی عکس آن صادق نیست .این دو شرط کافی هستند ولی ضروری نیستند چرا که سیگنالهایی را ممکن است بتوان یافت که دارای سری فوریه بوده ولی هیچیک از دو شرط را ارضا نمی کند .
- رابطه پارسوال: اگر سیگنال شرط ۱یا ۲ را ارضا کند برای توان سیگنال می توان نوشت .

$$P_x=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\,dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c(k)|^2$$

- اگر سیگنال پریودیک حقیقی باشد آنگاه $c(k)=c(-k)^*$ است و می توان سیگنال را به مولفه های حقیقی مثلثاتی به جای اکسپونانسیلهای کمپلکس تجزیه کرد.
- طیف دو طرفه پاره خطی *line spectra*: سری فوریه سیگنال پریودیک را میتوان با مجموعه پاره خطهایی به طول $|c(k)|$ در فرکانسهای $k\Omega_0$ می توان نشان داد. این کار را برای نمودار فاز آن نیز می توان داشت.



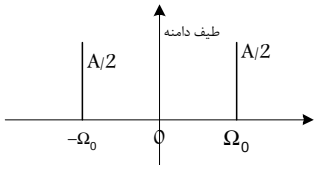
- طیف چگالی توان *PSD*: توان هر یک از مولفه ها $|c(k)|^2$است، بنابراین طیف چگالی توان را نیز بصورت طیف پاره خطی از المانهای $|c(k)|^2$ می توان رسم کرد که توان مولفه های سیگنال پریودیک را نشان می دهد.
- طیف سیگنال پریودیک گسسته است.

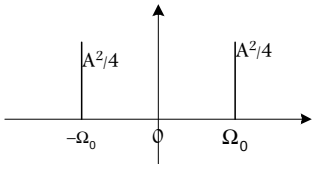
مثال ۱ :طیف دامنه، طیف چگالی توان و توان کل سیگنال $A\cos\Omega_0 t$ را بدست آورید.

طیف پاره خطی این سیگنال اینگونه بدست می آید.

$$x(t) = A\cos\Omega_0 t = \frac{A}{2}(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}) \Rightarrow$$

$$c(0) = 0, c(1) = \frac{A}{2}, c(-1) = \frac{A}{2}$$





مقدار توان سیگنال برابر است با:

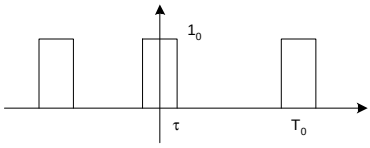
$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} A^2 \cos^2 \Omega_0 t dt = \frac{A^2}{2} = \sum |c(k)|^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

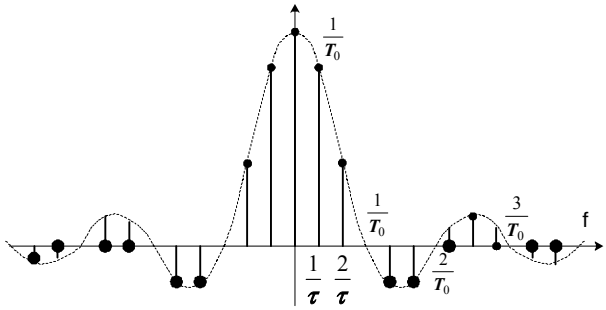
مثال ۲:طیف دامنه پالس پریودیک را دست آورید.

دامنه سری فوریه اینگونه بدست می آید.

$$c(k) = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T0}\frac{\sin(k\Omega_0\tau)}{k\Omega_0\tau}$$

دامنه و پوش آن در شکل نشان داده شده است





۲-۱-۲ تبدیل فوریه

تبدیل فوریه سیگنال *x(t)* برابر است با:

$$F.T. \Rightarrow X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$IFT \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} df$$

- تبدیل فوریه سیگنال *x(t)* وجود دارد، اگر *x(t)* انتگرال قدر مطلق محدود باشد

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

و تعداد نا پیوستگی ها و ،مینیمم - ماکزیمم ها محدود باشد. در اینصورت

$$x(t) = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- **سیگنال انرژی** شرط ضعیف تر وجود فوریه سیگنال آن است که *x(t)* سیگنال انرژی باشد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

اگر شرط ۱ صادق باشد حتما ۲ نیز صادق است ولی عکس آن صریح نیست. شروط ۱و ۲ کافی هستند ولی می توانند لازم نباشند. سیگنال $\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$ سیگنال انتگرال قدر مطلق محدود نیست (شرط ۱ را ارضا نمی کند) ولی انتگرال مربع آن محدود است (شرط ۲ را ارضا می کند) و دارای تبدیل فوریه ذیل است.

$$H(\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|\le 1\\ 0 & |\Omega|>1\end{cases}$$

در اکثر موارد برای سیگنالهای کلاس بند ۲ تبدیل فوریه وجود دارد. اگر فقط شرط ۲ صادق باشد،($IFTX(\Omega)$ به $x(t)$ میل نمی گند ولـی تفاوت انرژی دو سیگنال برابر صفر است.

- رابطه پارسوال:بین انرژی سیگنال و تبدیل فوریه سیگنال رابطه زیر وجود دارد

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)X(\Omega)^*d\Omega=\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)X(\Omega)^*df$$

- طیف چگالی انرژی ESD: $S_{xx}(f)$ چگالی انرژی سیگنال است که برابر با

$$S_{xx}(f)=X(f)X(f)^*$$

است این تابع فاقد اطلاعات فاز است و به طور منحصر به فرد معرف سیگنال $x(t)$ نیست. اگر $x(t)$ حقیقی باشد مـی تـوان نـشان داد کـه $S_{xx}(f)=S_{xx}(-f)$ است .بری محاسبه انرژی سیگنال در محدوده پهنای باند Δf می توان نوشت

$$\int_{f_1}^{f_1+\Delta f}S_{xx}(f)df+\int_{-f_1}^{-f_1-\Delta f}Sxx(f)df$$

- **تبدیل فوریه در حد**

سیگنال های مهم و مفیدی وجود دارند که شرایط تبدیل فوریه را ندارند ولی در حد می توان برای آنها تبدیل فوریه را محاسبه کرد. روابط ذیل در این کار مفید هستند.

$$1)\frac{\sin\pi z}{z}=\sin cz\quad 2)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\pi,a>0\quad 3)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\pi\quad 4)\int_{-\infty}^{\infty}T\sin c(fT)dt=1,5)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+x^2}dx=\pi,a>0$$

برای مثال:

تابع ضربه $\delta(t)$:

تابع ضربه ناپیوستگی نا محدود دارد، لذا تبدیل فوریه در نگاه اول ندارد. بنابراین به جای تبدیل فوریه تابع ضربه، تبدیل فوریه پنجره ای به عرض 2ε و دامنه $1/(2\varepsilon)$ محاسبه می شود که سطح زیر آن مانند تابع ضربه ۱ است. سپس ε به سمت صفر میل داده شده تا تابع تبدیل ضربه در حد بدست آید که برابر با $\Delta(f)=1$ است.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}e^{-j\Omega t}dt=\frac{1}{-2j\varepsilon\Omega}(e^{-j\Omega\varepsilon}-e^{j\Omega\varepsilon})=\frac{\sin\Omega\varepsilon}{\Omega\varepsilon}=\sin c(2f\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{=}1$$

این رابطه را مستقیما از تعریف تابع ضربه نیز می توان بدست آورد. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\Omega t}dt=1$

تابع ثابت A:

تابع ثابت نیز از توابعی است که انرژی آن نامحدود است. برای محاسبه تبدیل فوریه در حد، ابتدا تبدیل فوریه پنجره ای به عرض T محاسبه می گردد وبعد از تعیین تبدیل فوریه، T به سمت ∞ میل داده می شود. درنتیجه تبدیل فوریه $A\delta(f)$ برای آن بدست می آید. این رابطه در آخر بخش داده شده است.

$$\int_{-T}^{T}Ae^{-j\Omega t}dt=\frac{A}{-j\Omega}(e^{-j\Omega T}-e^{j\Omega T})=\frac{2A\sin\Omega T}{\Omega}=\frac{2AT\sin(2\pi fT)}{2\pi fT}=2AT\sin c(2fT)\underset{T\to\infty}{=}0\quad A\delta(f)=2\pi A\delta(\Omega)$$

نتیجه گیری نهایی در رابطه فوق بر این پایه استوار است که تابع $sinc$ تابعی نوسانی است که وقتی T به سمت ∞ می رود باریک شـده و دامنه آن در فرکانس صفر به بینهایت می رود وبه ازای تمام مقادیر T رابطه $\int_{-\infty}^{\infty}T\sin c(fT)dt=1$ بر قرار است. رابطه فوق تعریف تابع ضـربه را برای رابطه طیف کامل می کند.

تابع $e^{j\Omega 0t}$:

یکی دیگر از این توابع بسیار مهم است که انرژی نامحدود داشته و تبدیل فوریه ندارد، ولی در حد برای آن تبدیل فوریه $\delta(\Omega-\Omega_0)$ محاسبه می شود.

$$\int_{-T}^{T} e^{+j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt = \frac{2\sin(\Omega-\Omega_0)T}{\Omega-\Omega_0} = 2T\,\mathrm{sinc}[2(f-f_0)T] \underset{T\to\infty}{=} A\delta(f-f_0) = 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$$

در رابطه فوق تابع $sinc$ به فرکانس $f-f_0$ شیفت پیدا کرده است.

به این ترتیب با این تبدیل بین تبدیل فوریه سیگنال پریودیک مثلثاتی یا کمپلکس اکسیونانسیلی و طیف پاره خطی سری فوریه سیگنال پریودیک ارتباط برقرار می گردد . در اینجا بجای استفاده از پاره خط از تابع ضربه در میدان فرکانس برای نشان دادن دامنه ی طیف استفاده می شود که نتایج مشابهی را ارائه می کند.

تابع پله $u(t)$:

برای محاسبه فوریه پله از تابع $e^{-\alpha t}$ استفاده می شود که α مثبت و به سمت صفر می رود.

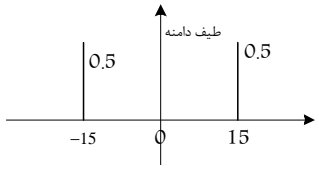
$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{\alpha+j\Omega} = \frac{\alpha-j\Omega}{\alpha^2+\Omega^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\Omega^2} + \frac{1}{j\Omega} \underset{\alpha\to 0}{=} \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

نتیجه گیری نهایی بر این پایه استوار است که تابع $\frac{\alpha}{\alpha^2+\Omega^2}$ به ازای α و Ω برابر صفر، مبهم است ولی از آنجا که رابطه $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+x^2} dx = \pi, a>0$ صادق است آنرا می توان با تابع ضربه معرفی کرد.

- دقت شود اگر چه در حد برای تابع پله و سینوسی تبدیل فوریه تعیین شد، ولی از آنجا که شرط محدود بودن انرژی سیگنال ارضا نمی شود، مربع دامنه طیف مطابق بند ۴ نبوده و طیف چگالی انرژی را نشان نمی دهد بلکه طیف چگالی توان سیگنال است .
- وجود تابع ضربه در طیف به این ترتیب به معنی وجود سیگنال پریودیک است که انرژی نا محدود دارد ولی توان متوسط آن محدود است.

مثال ۲:طیف سیگنالی در شکل نشان داده شده است انرژی یا توان متوسط آن را بدست آورید.

حل: چون در طیف ضربه ظاهر شده است، این ضربه ها معرف توان سیگنال پریودیکی هستند. لذا بجای انرژی در طیف، توان این قسمت محاسبه می گردد.



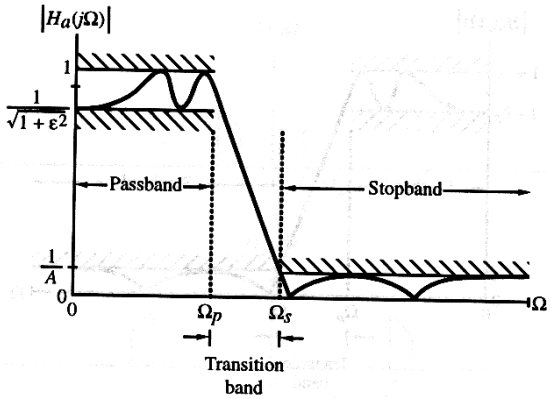
$P_x=0.5^2+0.5^2=0.5$

۲-۲ فیلتر آنالوگ

فیلتر سیستمی است که مشخصه فرکانس ورودی را تحت تاثیر قرار می دهد. برای مثال فیلتر پائین گذر مولفه های بالای فرکانس سیگنال ورودی را حذف و مولفه های فرکانس پائین را عبور می دهد.(*Lp*) فیلترهای فرکانس بالا مولفه های فرکانس پائین را حذف و فرکانس بالا را عبور می دهد.(*Hp*) فیلتر میان گذر فیلتری است که محدوده خاص فرکانسی را عبور میدهد و مولفه های فرکانس های بالا و پائین محدوده را حذف می کند.(*Bp*) فیلتر میان نگذر فیلتری است که تمام باند به استثنای محدوده خاص خود را عبور می دهد.(*Bs*) فیلتر *notch* فیلتری است که فرکانس خاصی را حذف می کند و فیلتر *selective* فرکانس خاصی را عبور می دهد..

یکی از معمولی ترین و گسترده ترین کاربردهای پردازش سیگنالی استفاه از آن در فیلتر کردن سیگنالها است.

۱-۲-۲ مشخصات فیلتر ها



پاسخ فرکانس فیلتر پایین گذر *LP* در شکل نشان داده شده است.

در نمودار دامنه، ۳ قسمت قابل تشخیص است.

۱: باند گذر :این باند از فرکانس صفر (*dc*) شروع و تا فرکانس Ω_p ادامه می یابد .بهره فیلتر در این باند ۱ بوده و می تواند به مقدار δ_p ریپل داشته باشد. ریپل باند گذر به *db* با $R_p=-20log(1-\delta_p)$ معمولا بیان می شود. به فرکانس های این محدوده اجازه عبور داده می شود. به فرکانس Ω_p گوشه باند گذر می گویند.

۲: باند حذف :که از فرکانس Ω_s شروع می شود و تا بینهایت ادامه می یابد بهره کوچک حداکثر $\delta_s=1/A$ دارد که به این معنی است که مولفه های فرکانس سیگنال ورودی مربوط به این قسمت تضعیف شده (تقریبا حذف شده) و اثر کمی از آن در خروجی دیده می شود. ریپل باند حذف معمولا به *db* با $R_s=-20log\delta_s$ بیان می شود. به فرکانس Ω_s گوشه ی باند حذف می گویند.

۳: باند انتقالی: فاصله بین Ω_p و Ω_s باند انتقالی است که بهره فیلتر از بهره باند گذر به باند حذف سقوط می کند. به $و $ به ترتیب ریپل باند گذر و باند حذف می گویند که بصورت *db* با $ (حداکثر ریپل باند گذر) و $(حداقل تضعیف باند حذف)بیان می شوند.

نحوه تعریف مشخصات فیلتر مطلوب

۱: ریپل باند گذر R_p

۲: ریپل باند حذف R_s

۳: لبه باند گذر Ω_p

۴: لبه باند حذف Ω_s

برای طراحی فیلترهای *LP* نرمال باترورث، چبی چف ۱، چبی چف ۲، الیپتیک و بسل جداولی در کتابهای فیلتر وجود دارد که مورد استفاده قرار می گیرد. ولی امروزه بدلیل وجود برنامه های کامپیوتری فیلتر کمتر مورد استفاده قرار می گیرند.

۲-۲-۲ فیلتر باترورث

مربع دامنه این فیلتر را تابع

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^2}$$

بیان می کند که در آن *N* درجه فیلتر و Ω_c فرکانس قطع است که در آن دامنه به *0.7* مقدار خود در فرکانس صفر می رسد. به این فرکانس، فرکانس نصف قدرت نیز گفته می شود زیرا مربع دامنه نصف مربع دامنه در فرکانس *DC* است. مقدار شیب افت در باند انتقالی -*20Ndb/dec* است. *N* قطب این فیلتر حول نیم دایره ی به شعاع Ω_c در سمت چپ محور $j\Omega$ قرار دارند.

$$p_l = \Omega_c e^{j[\frac{\pi(N+2l-1)}{2N}]}, l = 1,2,...,N$$

طراحی فیلتر باترورث :

۱. تعیین اطلاعات ورودی : $R_s, R_p, \Omega_c, \Omega_p$

۲. محاسبه پارامترهای باترورث:

$$1)\Omega_p \quad 2)\Omega_s \quad 3)A: R_s = -20\log\delta_s = -20\log\frac{1}{A} \quad 4)\varepsilon: R_p = -20\log(1-\delta_p) = -20\log\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

۳. تعیین درجه فیلتر(با تقریب اضافی به عدد صحیح)

$$N = \frac{\log\left(\frac{\sqrt{A^2-1}}{\varepsilon}\right)}{\log\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}$$

۴. تعیین فرکانس Ω_c: برای این کار دو رابطه وجود دارد. رابطه $1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega c}\right)^{2N} = A^2$ Ωs دقیق و Ωp بهتر رائه می کند و رابطه $1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega c}\right)^{N} = \varepsilon$ Ωp دقیق و Ωs بهتر ارائه می نماید.

۵. تابع تبدیل فیلتر در نهایت اینگونه می گردد.

$$H(s) = \frac{\Omega_c{}^N}{\prod_{l=1}^{N}(s-p_l)}$$

طراحی با *MATLAB*

۱. ورودی : $1)\Omega_p \quad 2)\Omega_s \quad 3)R_s = -20\log\delta_s = \quad 4)R_p = -20\log(1-\delta_p)$

۲. تعیین درجه فیلتر: *[N,Ωc]=buttord(Ωp,Ωs,Rp,Rs,'s')*

۳. محاسبه ضرایب تابع تبدیل *[num,den]=butter(N,Ωc,'s')*

به این فیلتر، فیلتر *maximally flat* و *monotonically decreasing* می گویند.

مثال ۲-۱:فیلتر پائین گذر باترورث طرح کنندکه ماکزیممافت در باند گذر *1db* و حداقل تضعیف در باند حذف *40db* باشد. لبه باند گذر *1k* و لبه باند حذف را *2K* در نظر بگیرید.

الف: روش حل دستی:

محاسبه پارامترهای باترورث:

$$1)\Omega_p = 1000 \quad 2)\Omega_s = 2000 \quad 3)R_s = 40 = -20\log\frac{1}{A} \Rightarrow A = 100 \quad 4)R_p = 1 = -20\log\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \Rightarrow \varepsilon = 0.5089$$

تعیین درجه فیلتر(با تقریب اضافی به عدد صحیح)

$$N = \frac{\log\left(\frac{\sqrt{100^2-1}}{0.5089}\right)}{\log\left(\frac{2}{1}\right)} = 7.1311 \approx 8$$

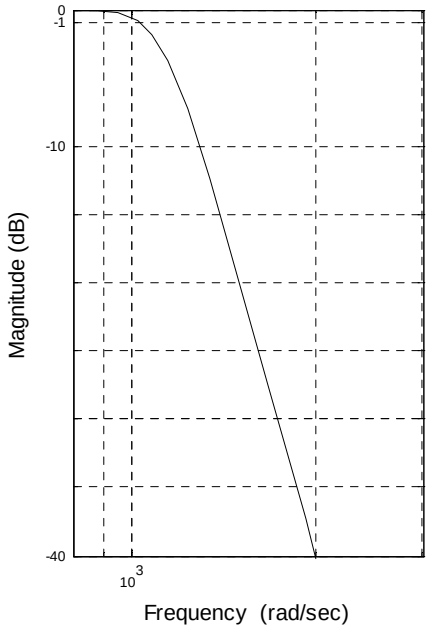
تعیین فرکانس Ω_c:

$$1+\left(\frac{2000}{\Omega c}\right)^{2N} = 100^2 \Rightarrow \Omega c = 1124.7$$

تابع تبدیل فیلتر در نهایت اینگونه می گردد.

$$H(s) = \frac{1124.7^8}{\prod_{l=1}^{8}(s-1124.7e^{j\frac{8+2l-1}{16}\pi})}$$

$$H(s) = \frac{2.56e024}{s^8 + 5765\,s^7 + 1.662e7\,s^6 + 3.108e10\,s^5 + 4.11e13\,s^4 + 3.931e16\,s^3 + 2.659e19\,s^2 + 1.167e22\,s + 2.56e24}$$



ب: طراحی با *MATLAB*

۱) تعیین درجه فیلتر:

[N,Ωc]=buttord(1000,2000,1,40,'s')

N=8,Ωc=1124.7

۲) محاسبه ضرایب تابع تبدیل

[num,den]=butter(N,Ωc,'s')

model=tf(num,den);

bodemag(model);

grid

شکل نمودار این فیلتر را نشان می دهد.

۲-۲-۳ فیلتر چپی چف۱

مربع دامنه پاسخ فیلتر چپی شف برابر است با

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_N\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^2}, \quad T_N(\Omega) = \begin{cases} \cos\left(N\cos^{-1}\Omega\right), & |\Omega| \le 1 \\ \cosh\left(N\cosh^{-1}\Omega\right), & |\Omega| > 1 \end{cases}$$

در این رابطه N درجه فیلتر و Ω_p لبه باند گذر و ε مربوط به ریپل باند گذر است.

N قطب این فیلتر حول یک بیضی در سمت چپ محور $j\Omega$ قرار دارند.

$$p_l = \sigma_l + j\Omega_l, l = 1,2 \quad \begin{cases} \sigma_l = -\Omega_p \frac{\gamma^2-1}{2\gamma}\sin\frac{(2l-1)\pi}{2N} \\ \Omega_l = \Omega_p \frac{\gamma^2+1}{2\gamma}\cos\frac{(2l-1)\pi}{2N} \end{cases} \quad ,\gamma = \left(\frac{1+\sqrt{1+\varepsilon 2}}{\varepsilon}\right)^{1/N}$$

این فیلتر، یک فیلتر تمام قطب با نوسان در باند گذر است.

طرح فیلتر چپی چف ۱

۱) تعیین اطلاعات ورودی : $R_s, R_p, \Omega_c, \Omega_p$

۲) محاسبه پارامترهای چبی چف ۱:

$$1)\Omega_p \quad 2)\Omega_s \quad 3)A: R_s = -20\log\delta_s = -20\log\frac{1}{A} \quad 4)\varepsilon: R_p = -20\log(1-\delta_p) = -20\log\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

۳) تعیین درجه فیلتر(با تقریب اضافی به عدد صحیح)

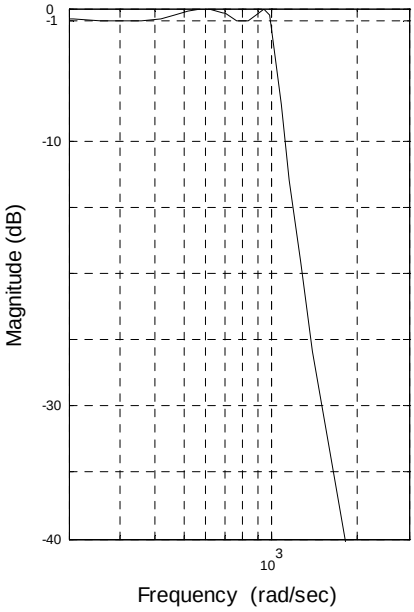
$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{A^2-1}}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}$$

۴) محاسبه قطبها و نوشتن تابع تبدیل:

$$H(s) = \frac{|p_l|^N}{\prod_{l=1}^{N}(s-p_l)}$$

همچنانکه دیده می شود انجام محاسبات این فیلتر شدنی ولی بسیار مفصل است، از همین رو جدول ضرایب بسیار مغتنم می باشد.

طراحی با MATLAB



۱) ورودی :

$$1)\Omega_p \quad 2)\Omega_s \quad 3)\boldsymbol{R_s} = -20\log\boldsymbol{\delta_s} = \quad 4)\boldsymbol{R_p} = -20\log(1-\boldsymbol{\delta_p})$$

۲) تعیین درجه فیلتر:

۳) *[N,Ωp]=cheb1ord(Ωp,Ωs,Rp,Rs,'s')*

۴) محاسبه ضرایب تابع تبدیل

[num,den]=cheby1(N,Rp,Ωp,'s')

مثال۲-۲:مثال ۲-۱ را برای فیلتر چپی چف ۱ طرح کنید.

۱) تعیین درجه فیلتر:

[N,Ωp]=cheb1ord(1000,2000,1,40,'s')
N=5,Ωp=1000

۲) محاسبه ضرایب تابع تبدیل

[num,den]=cheby1(N,1,Ωp,'s') ;
model=tf(num,den);
bodemag(model);

grid

شکل نمودار این فیلتر را نشان می دهد و تابع تبدیل آن از اینقرار است.

$$\boldsymbol{H(s)} = \frac{1.228e014}{s^5 + 936.8\,s^4 + 1.689e006\,s^3 + 9.744e008\,s^2 + 5.805e011\,s + 1.228e014}$$

چپی شف نوع ۲

مربع دامنه پاسخ فیلتر چپی شف برابر است با

$$\left|H(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\left[\dfrac{T_N\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_p}\right)}{T_N\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega}\right)}\right]^2}, \qquad T_N(\Omega) = \begin{cases}\cos\left(N\cos^{-1}\Omega\right), & |\Omega| \le 1\\ \cosh\left(N\cosh^{-1}\Omega\right), & |\Omega| > 1\end{cases}$$

در این رابطه N درجه فیلتر، Ω_s لبه باند حذف، Ω_p لبه باند گذر و ε مربوط به ریپل باند گذر است. این فیلتر دارای N قطب و صفر می باشد. قطبهای این فیلتر عبارتند از:.

$$p_l = \sigma_l + j\Omega_l, l = 1,2 \quad \begin{cases}\sigma_l = \Omega_s \dfrac{a_l}{a_l^2 + b_l^2}\\ \Omega_l = -\Omega_p \dfrac{b_l}{a_l^2 + b_l^2}\end{cases}, \qquad \begin{aligned} a_l &= -\Omega_p \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma}\sin\frac{(2l-1)\pi}{2N}\\ b_l &= \Omega_p \frac{\gamma^2 + 1}{2\gamma}\cos\frac{(2l-1)\pi}{2N}\end{aligned}, \gamma = \left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right)^{1/N}$$

و صفرهای آن

$$z_l = \frac{j\Omega_s}{\cos\dfrac{(2l-1)\pi}{2N}}$$

هستند. این فیلتر دارای نوسان در باند حذف است. اگر درجه فیلتر زوج باشد، درجه صورت و مخرج کسر برابر می گردد و تضعیف نویزهای فرکانس بالا با مشکل روبرو می گردد. وقتی درجه فرد باشد یکی از صفرها در بینهایت و درجه صورت یکی کمتر از مخرج می گردد تا تضعیف *-20db/dec* در فرکانسهای بالا را تضمین کند.

طرح فیلتر چپی چف ۲

۱) تعیین اطلاعات ورودی : $R_s, R_p, \Omega_c, \Omega_p$

۲) محاسبه پارامترهای چبی چف ۱:

۳) $1)\Omega_p \quad 2)\Omega_s \quad 3)A: R_s = -20\log\delta_s = -20\log\frac{1}{A} \quad 4)\varepsilon: R_p = -20\log(1-\delta_p) = -20\log\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

۴) تعیین درجه فیلتر(با تقریب اضافی به عدد صحیح)

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{A^2-1}}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}$$

۵) محاسبه قطبها و نوشتن تابع تبدیل:

$$H(s) = \left|\frac{p_l}{z_l}\right|^N \frac{\prod_{l=1}^{N}(s-z_l)}{\prod_{l=1}^{N}(s-p_l)}$$

همچنانکه دیده می شود انجام محاسبات این فیلتر شدنی ولی بسیار مفصل است، از همین رو جدول ضرایب بسیار مغتنم می باشد.

طراحی با *MATLAB*

۱) ورودی :

$1)\Omega_p \quad 2)\Omega_s \quad 3)R_s = -20\log\delta_s = \quad 4)R_p = -20\log(1-\delta_p)$

۲) تعیین درجه فیلتر:

[N,Ω]=cheb2ord(Ωp,Ωs,Rp,Rs,'s')

۳) محاسبه ضرایب تابع تبدیل

[num,den]=cheby2(N,Rs,Ω,'s')

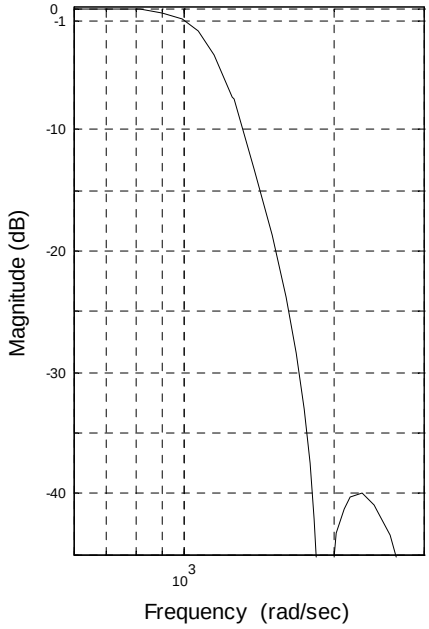
مثال ۲-۳:مثال ۲-۱ را برای فیلتر چپی چف ۲ طرح کنید.

تعیین درجه فیلتر:

```
[N,Ω]=cheb2ord(1000,2000,1,40,'s')
N=5,Ω=1802.8
```

محاسبه ضرایب تابع تبدیل

```
[num,den]=cheby(N,40,Ω,'s')        ;
model=tf(num,den);
bodemag(model);
grid
```



شکل نمودار این فیلتر را نشان می دهد و تابع تبدیل آن از اینقرار است.

$$H(s) = \frac{90.14\,s^4 + 6.978e-011\,s^3 + 1.172e009\,s^2 + 0.0008655\,s + 3.047e015}{s^5 + 3875\,s^4 + 7.502e006\,s^3 + 9.082e009\,s^2 + 6.943e012\,s + 3.047e015}$$

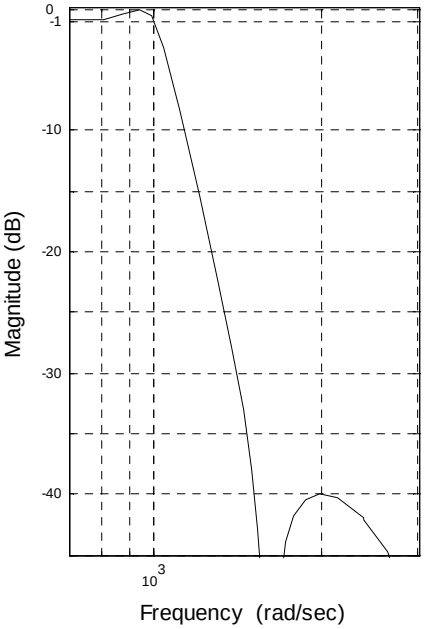
۲-۲-۴ فیلتر *Eliptic (Cauer filter)*

مربع دامنه پاسخ فیلتر الیپتیک برابر است با

$$\left|H(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_N\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^2}$$

روابط این فیلتر مفصل است لذا از طرح آن در اینجا خودداری می شود.

اگر درجه فیلتر زوج باشد، درجه صورت و مخرج کسر برابر می گردد و تضعیف نویزهای فرکانس بالا با مشکل روبرو می گردد. وقتی درجه فرد باشد یکی از صفرها در بینهایت و درجه صورت یکی کمتر از مخرج می گردد تا تضعیف ***-20db/dec*** در فرکانسهای بالا را تضمین کند.



طراحی با *MATLAB*

۱) ورودی :

$$1)\Omega_p \quad 2)\Omega_s \quad 3)\boldsymbol{R_s} = -20\log\boldsymbol{\delta_s} = \quad 4)\boldsymbol{R_p} = -20\log(1-\boldsymbol{\delta_p})$$

۲) تعیین درجه فیلتر:

[N,Ω]=ellipord(Ωp,Ωs,Rp,Rs,'s')

۳) محاسبه ضرایب تابع تبدیل

[num,den]=ellip(N,Rp,Rs,Ω,'s')

مثال ۲-۴: مثال ۲-۱ را برای فیلتر الیپتیک طرح کنید.

تعیین درجه فیلتر:

[N,Ω]=ellipord(1000,2000,1,40,'s')
N=4,Ω=1000

محاسبه ضرایب تابع تبدیل

[num,den]=ellip(N,1,40,Ω,'s') ;
model=tf(num,den);
bodemag(model);
grid

شکل نمودار این فیلتر را نشان می دهد و تابع تبدیل آن از اینقرار است.

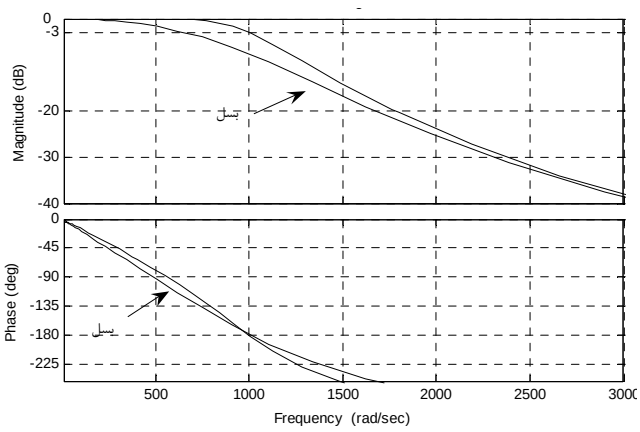
$$\cdot\boldsymbol{H(s)} = \frac{0.01\,s\text{^}4 - 2.99e-016\,s\text{^}3 + 1.502e005\,s\text{^}2 - 3.997e-008\,s + 3.22e011}{s\text{^}4 + 939.1\,s\text{^}3 + 1.514e006\,s\text{^}2 + 8.037e008\,s + 3.612e011}$$

۲-۲-۵ فیلتر بسل *Linear Phase*

فیلتر بسل فیلتر تمام قطبی است که مشخصه ویژه آن دارا بودن فاز خطی در محدوده باند گذر است تابع تبدیل این فیلتر از این قرار است:

$$\boldsymbol{H(s)} = \frac{d_0}{s^N + d_{N-1}\,s^{N-1} + \ldots d_1\,s + d0}, \quad \boldsymbol{dl} = \frac{(2N-\boldsymbol{l})!}{2^{N-\boldsymbol{l}}\boldsymbol{l}!(N-\boldsymbol{l})!}$$

شکل های مقابل مقایسه دامنه و فاز فیلتر باترورث درجه ۴ با بسل درجه ۴ با فرکانس قطع ۱۰۰۰ را نشان میدهد. بـه فـاز خطی بسل تا فرکانس ۱۰۰۰ توجه کنید.



طراحی فیلتر بسل با *MATLAB*

[num,den]=besself(N,Ωn)

۲-۲-۶ مقایسه انواع روش های طراحی فیلتر آنالوگ

۱: کوچکترین باند انتقالی به ازای یک درجه: بترتیب الیپتیک، چپی شف، باتروورث، بسل

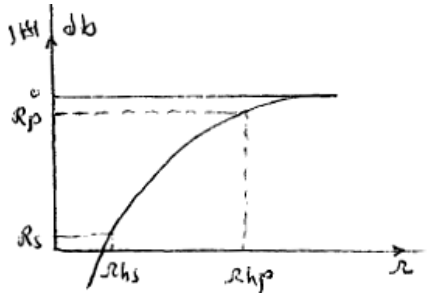
۲: بیشترین مقدار فاز خطی : بسل تمام باند گذر، باتروورث و چپی شف (حدودا *0.75* باند گذر)،الیپتیک (*0.5* باند گذر)

۳: کمترین درجه فیلتر برای مشخصات مشابه: در یک مثال الیپتیک (درجه ۶)، چپی شف (درجه ۱۰)، باتروورث(درجه ۲۹) و بسل (بسیار بالا) بدست آمد. بسل برای کار فیلتر مناسب نیست.

۴: در طراحی فیلتر با درجه ۱۵ و بالاتر، از نظر عددی به لحاظ گرد کردن اعداد، مشکل بوجود می آید. در همین رابطه تعیین قطبها، صفرها و بهره فیلتر (مدل فیلتر بر اساس صفرها ، قطبها و بهره) بر ضرایب چند جمله ای کسری (تابع تبدیل) رجحان دارد.

۲-۳ طراحی فیلترهای غیر پایین گذر

فیلتر بالا گذر



۱: تعریف مشخصات فیلتر $R_p, R_s, \Omega_{hp}, \Omega_{hs}$

۲: تعیین مشخصات فیلتر پایین گذر مشابه و طراحی آن *H(sl)* $R_p, R_s, \Omega_{lp} = 1, \Omega_{ls} = \frac{\Omega_{hp}}{\Omega_{hs}}$

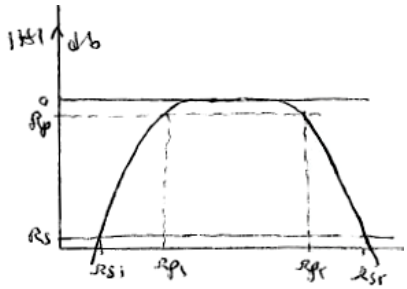
۳: تبدیل فیلتر پایین گذر به بالا گذر با استفاده از تبدیل $\frac{s_l}{\Omega_{lp}} = \frac{s_h}{\Omega_{hp}}$

برای طراحی مستقیم، باتروورث، با *MATLAB* از دستورات ذیل می توان استفاده کرد.

```
[N,Ωc]=buttord(Ωhp,Ωhs,Rp,Rs,'s');
[nh,mh]=butter(N,Ωc,'high','s');
model=tf(nh,mh);bodemag(model);
```

فیلتر میان گذر

طراحی فیلتر میان گذر براساس فیلتر پائین گذر مبنا صورت می گیرد که مشخصات آن بدست آمده و بعد از طراحی از طریق رابطه تبدیل به فیلتر میان گذر ، بدل می گردد.



۱: تعریف مشخصات فیلتر $R_p, R_s, [\Omega_{p1}, \Omega_{p2}], [\Omega_{s1}, \Omega_{s2}]$

۲: تعیین تیز ترین باند انتقالی $min(\frac{\Omega_{s2}}{\Omega_{p2}}, \frac{\Omega_{p1}}{\Omega_{s1}}) = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$

۳: تعیین مشخصات فیلتر پایین گذر مشابه و طراحی آن *H(sl)*. برای بدست آوردن Ω_{ls} از رابطه تبدیل پایین گذر-میانگذر استفاده می شود $R_p, R_s, \Omega_{lp} = 1, \frac{j\Omega_{ls}}{1} = \frac{(j\Omega_s)^2 + \Omega_0^2}{j\Omega_s * BW}$

۳: تبدیل فیلتر پایین گذر به بالا گذر با استفاده از تبدیل $\frac{s_l}{\Omega_{lp}} = \frac{s_B^2 + \Omega_0^2}{s_B * BW}, \begin{cases} \Omega_0 = \Omega_{p1} * \Omega_{p2} \\ BW = \Omega_{p2} - \Omega p1 \end{cases}$

برای طراحی مستقیم با *MATLAB* از دستورات ذیل می توان استفاده کرد.

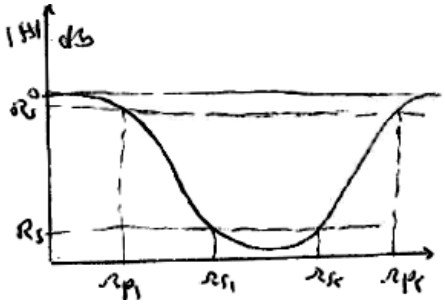
```
[N,Ωc]=buttord([Ωp1,Ωp2],[Ωs1,Ωs2],Rp,Rs,'s');[nb,mb]=butter(N,Ωc,'s')
[N,Ωc1]=cheb1ord([Ωp1,Ωp2],[Ωs1,Ωs2],Rp,Rs,'s');[nb,mb]=cheby1(N,Rp,Ωc1,'s')
[N,Ωc2]=cheb2ord([Ωp1,Ωp2],[Ωs1,Ωs2],Rp,Rs,'s');[nb,mb]=cheby2(N,Rs,Ωc2,'s')
[N,Ωe]=ellipord([Ωp1,Ωp2],[Ωs1,Ωs2],Rp,Rs,'s');[nb,mb]=ellip(N,Rp,Rs,Ωe,'s')
```

فیلتر میان نگذر

طراحی فیلتر میان نگذر براساس فیلتر پائین گذر مبنا صورت می گیرد که مشخصات آن بدست آمده و بعد از طراحی از طریق رابطه تبدیل به فیلتر میان گذر ، بدل می گردد.

۱: تعریف مشخصات فیلتر $R_p, R_s, [\Omega_{p1}, \Omega_{p2}], [\Omega_{s1}, \Omega_{s2}]$

۲: تعیین تیز ترین باند انتقالی $min(\frac{\Omega_{p2}}{\Omega_{s2}}, \frac{\Omega_{s1}}{\Omega_{p1}}) = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$



۳: تعیین مشخصات فیلتر پایین گذر مشابه و طراحی آن $H(s_l)$ برای بدست آوردن Ω_{ls} از رابطه تبدیل پایین گذر-میانگذر استفاده می شود

$$R_p, R_s, \Omega_{lp} = 1, \frac{j\Omega_{ls}}{1} = \frac{j\Omega_s * BW}{(j\Omega_s)^2 + \Omega_0^2}$$

۳: تبدیل فیلتر پایین گذر به بالا گذر با استفاده از تبدیل

$$\frac{s_l}{\Omega_{lp}} = \frac{s_s * BW}{s_s^2 + \Omega_0^2}, \begin{cases} \Omega_0 = \Omega_{s1} * \Omega_{s2} \\ BW = \Omega_{s2} - \Omega_{s1} \end{cases}$$

برای طراحی مستقیم با *MATLAB* از دستورات ذیل می توان استفاده کرد.

```
[N,Ωc]=buttord([Ωp1,Ωp2],[Ωs1,Ωs2],Rp,Rs,'s');[nb,mb]=butter(N,Ωc,'stop','s')
[N,Ωc1]=cheb1ord([Ωp1,Ωp2],[Ωs1,Ωs2],Rp,Rs,'s');[nb,mb]=cheby1(N,Rp,Ωc1, 'stop','s')
[N,Ωc2]=cheb2ord([Ωp1,Ωp2],[Ωs1,Ωs2],Rp,Rs,'s');[nb,mb]=cheby2(N,Rs,Ωc2, 'stop','s')
[N,Ωe]=ellipord([Ωp1,Ωp2],[Ωs1,Ωs2],Rp,Rs,'s');[nb,mb]=ellip(N,Rp,Rs,Ωe, 'stop','s'
```

مثال ۲-۵ :فیلتر بالاگذر باتروورث با *Rs=40db, Rp=0.1db,Ωhs=2πkHz,Ωhp=8πkHz* طرح کنید .

الف: *Ωlp=1* را فرض می کنیم. سپس *Ωls=Ωlp*Ωhp/Ωhs=4*بدست می آید.

ب: فیلتر پائین گذر با مشخصات *Rs=40db, Rp=0.1db,Ωls=4,Ωlp=1* باید طرح شود.

این کار را بصورت دستی طبق ۲-۲-۲ می توان انجام داد و یا به کمک*MATLAB* نوشت.

```
[N,Ωn]=buttord(Ωlp,Ωls,Rp,Rs,'s');
[B,A]=butter(N,Ωn,'s');[nh,mh]=lp2hp(B,A,8000π)
```

ج: بجای محاسبات بند الف و ب می توانستیم مستقیما فیلتر را از طریق اجرای دستورات ذیل بدست آوریم.

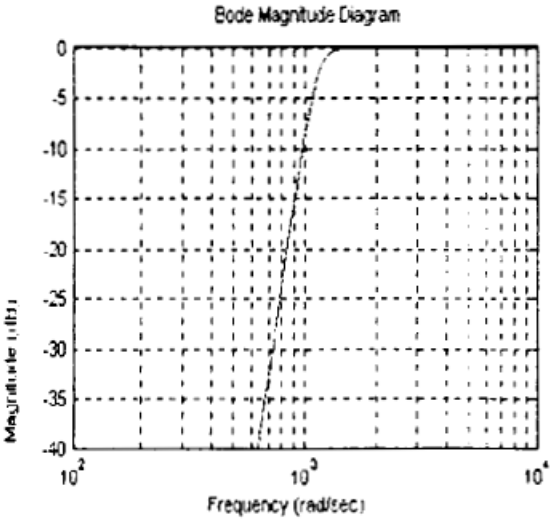
```
[N,Ωc]=buttord(Ωhp,Ωhs,Rp,Rs,'s');
[nh,mh]=butter(N,Ωc,'high','s');
```

مثال ۲-۶: فیلتر بالا گذری با *Rs=40db, Rp=1db,Ωhs=650,Ωhp=1300* طرح کنید.

```
[N,Ωc]=buttord(Ωhp,Ωhs,Rp,Rs,'s');
[nh,mh]=butter(N,Ωc,'high','s');
model=tf(nh,mh);bodemag(model);
```

جواب:

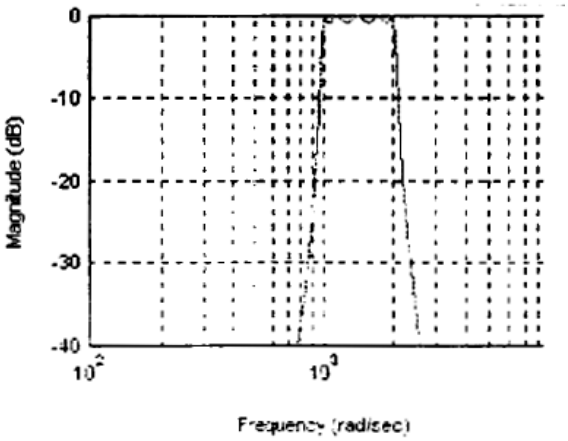
[N=8;Ωc=1105.9]



مثال ۲-۷: فیلتر میان گذر چبی چف۱ با *Rs=40db, Rp=2db,Ωs=[800,2500],Ωp=[1000,2000]* طرح کنید.

```
[N,Wc1n]=cheb1ord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')
[nB,mB]=cheby1(n,Rp,Wc1n,'s')
model=tf(nB,mB); bodemag(model)

(n=۵ , Wc1n=[۱۰۰۰,۲۰۰۰]
```



مثال ۲-۸: فیلتر میان گذر باتروث با *Rs=40db, Rp=1db,Ωs=[50,3000],Ωp=[400,800]* طرح کنید.

راه حل اول : استفاده مستقیم از دستور *MATLAB*

```
[n,Wc]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')   : n=۳; Wc=[۳۴۴,۱۸۷, ۹۵۷۵۴]
[q,p]=butter(n,Wc,'s'); tf(q,p)
```

$$H_{Bp}(j) = \frac{۲,۴۲۲e۸\,s^{۳}}{s^{۶}+۱۲۴۷s^{۵}+۱,۷۳۷e۷s^{۴}+۱,۰۴۹e۱۱s^{۳}+۵,۵۵۹e۱۱s^{۲}+۱,۲۷۷e۱۴s+۲,۲۷۷e۱۷}$$

راه حل دوم: بر اساس طراحی فیلتر پایین گذر مبنا

$$\frac{W_{Bp1}}{W_{BS1}} = \frac{۴۰۰}{۵۰} > \frac{\Omega_{BSr}}{\Omega_{Bpr}} = \frac{۳۰۰۰}{۸۰۰} = ۳,۷۵ \Rightarrow W'_{LS} = W_{BSr} = ۳۰۰۰$$

$$W_0^{۲} = W_{p1}W_{pr} = ۴۰۰ \times ۸۰۰ \quad ; \quad BW = \Omega_{pr} - \Omega_{p1} = ۴۰۰$$

$$W_{Lp} = 1 \Rightarrow S_L = W_{Lp}\frac{S_B^{۲}+W_0^{۲}}{S_B \cdot BW} \Rightarrow jW_{LS} = 1 \times \frac{(j۳۰۰)^{۲}+۴۰۰\times ۸۰۰}{j۳۰۰ \times ۴۰۰} \Rightarrow W_{LS} = ۷,۲۳۳$$

a) حال فیلتر پائین گذر با *MATLAB* طرح می شود

```
[n,Wc]=buttord(WLp,WLS,Rp,Rs,'s')   ⇒ n=۳ , Wc=۱,۵۵۸۳
[qL,pL]=butter(n,Wc,'s'); [q,p]=lp2bp(qL,pL,Ω0,BW)
```

که همان جواب راه حل اول بدست می آید.

b) این بار فیلتر پایین گذر مبنا نیز دستی طرح می گردد.

$$R_S = -۲۰\log\frac{1}{A} = ۴۰ \Rightarrow A = ۱۰۰$$

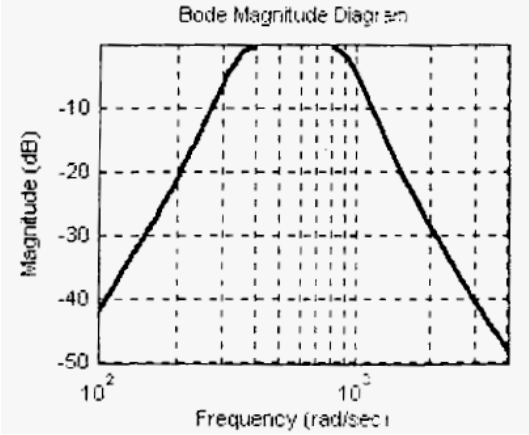
$$R_p = -۲۰\log\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^{۲}}} = 1 \Rightarrow \epsilon = ۰,۵۸۹ \qquad \Rightarrow N = \frac{\log\frac{\sqrt{A^{۲}-1}}{\epsilon}}{\log\frac{۷,۴۳۳}{1}} = ۲,۷۷ \Rightarrow N = ۳$$

$$1+\left(\frac{W_S}{W_C}\right)^{۲N} = A^{۲} \Rightarrow 1+\left(\frac{۷,۴۳۳}{W_C}\right)^{۲N} = ۱۰۰ \Rightarrow \Omega_C = ۱,۵۵۸۳$$

$$H_L(S_L) = \frac{(۱,۵۵۸۳)^{۳}}{(S_L-۱,۵۵۸۳e^{j\frac{۲\pi}{۳}})(S_L-۱,۵۵۸۳e^{j\pi})(S_L-۱,۵۵۸۳e^{j\frac{۴\pi}{۳}})} =$$

$$= \frac{۳۷۸۴۰}{s_L^۳ + ۳۱۱۲۲ s_L^۲ + ۴۱۸۵۲۲ s_L + ۳۷۸۴۰}$$

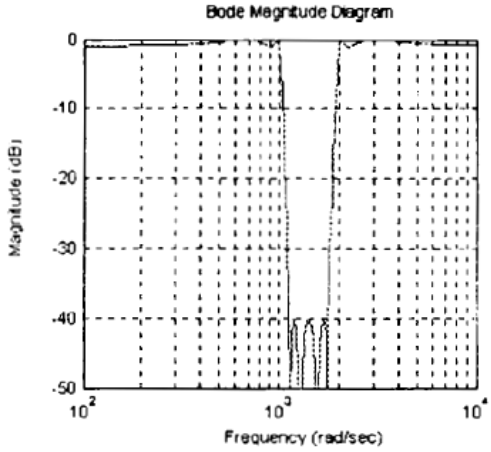
تابع تبدیل فیلتر میان گذر در نهایت از رابطه مقابل بدست می آید که همان جواب راه حل اول است.



$$H(s_L)\Big|_{s_L = \frac{s^۲ + ۴۰۰ \times ۸۰۰}{۴۰۰ s}} = H_{Bp}(s)$$

مثال ۲-۹:فیلتر میان نگذر الیپتیک با *Rs=40db, Rp=1db,Ωs=[1112,1800],Ωp=[1000,2000]* طرح کنید.

```
[n,wen]= ellipord(wp,ws,Rp,Rs,'s')
[ns,ms]= ellip(n,Rp,Rs,wen,'stop','s')
model=tf(ns,ms);bodemag(model)
(n=4 ,wen=[1000,2000])
```



مثال ۲-۱۰:فیلتر میان گذر باتروث با *Rs=40db, Rp=1db,Ωs=[1112,1800],Ωp=[1000,2000]* طرح کنید.

راه حل اول: بکارگیری مستقیم دستورات *MATLAB*

```
[n,wc]= buttord(wp,ws,Rp,Rs,'s') => n=3, wc=[1051,1,2101,4]
[q,p]= butter(n,wc,'stop','s'),model= tf(q,p); bodemag(model)
```

$$H_{BS}(s) = \frac{s^۶ + ۹,۲۴۵ s^۴ + ۳,۰۷۲۴۱۱ s^۲ + ۳۶۷۷۴۱۲}{s^۶ + ۳۱۱۲ s^۵ + ۷,۱۵۴۴۲۴ s^۴ + ۸,۷۷۲۴۹ s^۳ + ۲۱۵۱۴۱۲ s^۲ + ۳۸۰۲۴۱۴ s + ۳۶۷۷۴۱۲}$$

راه حل دوم: بر اساس فیلتر پایین گذر مبنا

$$\frac{\omega_{ss1}}{\omega_{sp1}} = \frac{۴۰۰}{۱۰۰} < \frac{\omega_{sp2}}{\omega_{ss2}} = \frac{۸۰۰}{۸۰۰} = 1 \Rightarrow \omega'_{Lp} = \omega_{sp1} = 100$$

$$\omega_0^۲ = ۴۰۰ \times ۸۰۰ \quad , \quad BW = ۸۰۰ - ۴۰۰ = ۴۰۰$$

$$\omega_{Ls} = 1 \Rightarrow s_L = \omega_{Ls} \frac{s_s BW}{s_s^۲ + \omega_0^۲} \Rightarrow j\omega_{Lp} = 1 \times \frac{j100 \times ۴۰۰}{(j100)^۲ + ۴۰۰ \times ۸۰۰} \Rightarrow \omega_{Lp} = 0.129$$

به این ترتیب فیلتر پایین گذر مبنا با مشخصات *Rs=40db, Rp=1db,Ωls=1,Ωlp=0.1254* طرح می گردد.

روش*a*) با دستورات *MATLAB*

$$[n, w_c] = \text{buttord}(w_{Lp}, w_{Ls}, R_p, R_s, 's') \Rightarrow n = ۴,\ w_c = ۰.۲۱۵۴$$

$$[q_L, p_L] = \text{butter}(n, w_c, 's');\ [q, p] = \text{lpc2bs}(q_L, p_L, w_0, BW),\ \text{model} = tf(q, p)$$

مدل بدست آمده همان جواب راه حل اول است

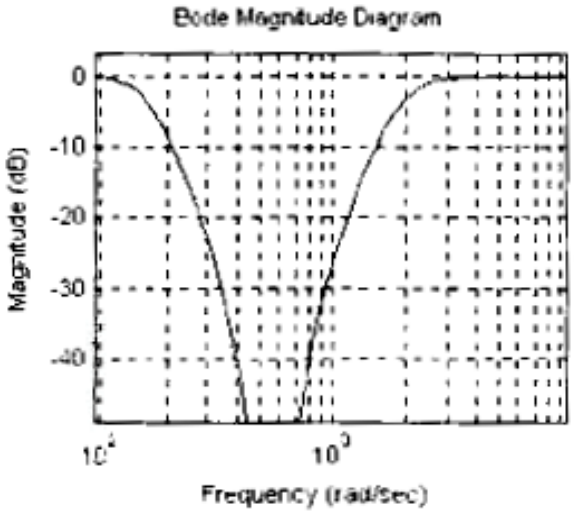
روش*b*) حل دستی فیلتر پایین گذر مبنا

$$R_s = -۲۰ \lg \frac{1}{A} = ۴۰ \Rightarrow A = ۱۰۰ \quad ,\ R_p = -۲۰ \lg \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^۲}} = ۱ \Rightarrow \varepsilon = ۰/۵۰۸۹$$

$$N = \frac{\lg \frac{\sqrt{A^۲-1}}{\varepsilon}}{\lg \frac{w_{Ls}}{w_{Lp}}} = ۱/۵۷ \Rightarrow N = ۴ \Rightarrow ۱ + \left(\frac{w_{Ls}}{w_c}\right)^{۲N} = A^۲ \Rightarrow w_c = ۰.۲۱۵۴$$

$$H_L(s_L) = \frac{۰.۲۱۵۴^۴}{(s_L - ۰.۲۱۵۴ e^{j(۳\pi/۴)})(s_L - ۰.۲۱۵۴ e^{j\pi})(s_L - ۰.۲۱۵۴ e^{j\frac{۵\pi}{۴}})} =$$

$$= \frac{۰.۰۱}{s_L^۴ + ۰.۶۴۰۹ s_L^۳ + ۰.۰۹۲۸۴ s_L^۲ + ۰.۰۹۲۸۴ s_L + ۰.۰۱}$$

از این جاگذاری جواب راه حل اول مجددا بدست می آید.

$$H_{BS}(s) = H_L(s_L)\Big|_{s_L = \frac{s - BW}{s^۲ + w_0^۲}} = \frac{۶۰۰ s}{s^۴ + ۶۰۰ s^۳ + ۱۰۰۰۰ s^۲ + ۶۰۰ s + ۱۰۰۰۰}$$